

CRITÉRIOS DE AVALIAÇÃO DE MATEMÁTICA A – 12º ANO

Ano letivo 2026/2027

CRITÉRIOS ESPECÍFICOS		
DOMÍNIOS	Conhecimento 50%	Dominar conceitos e procedimentos, de acordo com as Aprendizagens Essenciais no âmbito dos temas matemáticos
	Resolução de problemas 30%	Compreender e construir explicações e justificações matemáticas, incluindo o recurso a exemplos e contraexemplos. Conceber e aplicar estratégias na resolução de problemas em contextos matemáticos e não matemáticos e avaliar a plausibilidade dos resultados.
	Comunicação Matemática e Participação 20%	Expressar, oralmente e por escrito, ideias matemáticas, com precisão e rigor, e justificar raciocínios, procedimentos e conclusões, recorrendo ao vocabulário e linguagem próprios da Matemática (convenções, notações, terminologia e simbologia). Desenvolver confiança nas suas capacidades e conhecimentos matemáticos, e a capacidade de analisar o próprio trabalho e regular a sua aprendizagem. Desenvolver persistência, autonomia e à-vontade em lidar com situações que envolvam a Matemática no seu percurso escolar e na vida em sociedade.

Domínios	DESCRITORES DE DESEMPENHO				
	18 a 20	14 a 17	10 a 13	8 a 9	0 a 7
Conhecimento	O aluno adquire todas as Aprendizagens Essenciais e outras previstas no domínio/tema, revelando total rigor científico e linguístico. Demonstra sempre responsabilidade no cumprimento das tarefas propostas e prazos.	Nível Intermédio	O aluno adquire as Aprendizagens Essenciais e outras previstas no domínio / tema, revelando algum rigor científico e linguístico. Demonstra alguma responsabilidade no cumprimento das tarefas propostas e prazos.	Nível Intermédio	O aluno não adquire as Aprendizagens Essenciais e outras previstas no domínio / tema, nem demonstra rigor científico e linguístico. Não demonstra responsabilidade no cumprimento das tarefas propostas e prazos.
Resolução de problemas	O aluno aplica as Aprendizagens Essenciais e outras adquiridas a situações práticas/experimentais, de forma criativa e inovadora . Demonstra total autonomia, empenho e espírito de iniciativa, adequando sempre os seus comportamentos.		O aluno aplica as Aprendizagens Essenciais e outras adquiridas a situações práticas / experimentais, mas de forma pouco criativa e inovadora . Demonstra alguma autonomia, empenho e espírito de iniciativa, adequando quase sempre os seus comportamentos.		O aluno não consegue aplicar as Aprendizagens Essenciais e outras adquiridas a situações práticas/experimentais. Não demonstra autonomia, empenho e espírito de iniciativa, adequando poucas vezes os seus comportamentos.
Comunicação Matemática e Participação	O aluno assume sempre uma postura comunicativa e participativa durante o desenvolvimento e aplicação prática das Aprendizagens Essenciais e outras. Participa e coopera sempre de forma clara e organizada. Estabelece sempre uma relação interpessoal muito adequada.		O aluno assume parcialmente uma postura comunicativa e participativa durante o desenvolvimento e aplicação prática das Aprendizagens Essenciais e outras. Participa e coopera algumas vezes de forma clara e organizada. Estabelece, por vezes, uma relação interpessoal adequada.		O aluno não assume uma postura comunicativa e participativa durante o desenvolvimento e aplicação prática das Aprendizagens Essenciais e outras. Não Participa nem coopera de forma clara e organizada. Não estabelece uma relação interpessoal adequada.

APRENDIZAGENS ESPECÍFICAS

TEMA/Unidade	APRENDIZAGENS ESSENCIAIS E OUTRAS	ÁREAS DE COMPETÊNCIA DO PERFIL DOS ALUNOS	SUGESTÕES DE AÇÕES ESTRATÉGICAS DE ENSINO ORIENTADAS PARA O PERFIL DOS ALUNOS	SUGESTÕES DE TÉCNICAS E INSTRUMENTOS DE RECOLHA DE INFORMAÇÃO
Números complexos • Números complexos na forma algébrica 12 aulas - Unidade imaginária - Forma algébrica - Conjugado e módulo de um número complexo - Igualdade de complexos - Operações elementares com números complexos na forma algébrica - Representação de complexos no plano de Argand - Gauss	- Contextualizar historicamente a origem dos números complexos. - Identificar a unidade imaginária e o conjunto $\mathbb{C}$ dos números complexos. - Resolver equações do 2º grau, de coeficientes reais, quando não existem raízes reais. - Representar números complexos na forma algébrica, identificando parte real, parte imaginária, módulo e conjugado, bem como números imaginários puros em $\mathbb{C}$. - Estabelecer a igualdade de números complexos na forma algébrica. - Efetuar operações elementares com números complexos na forma algébrica (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação). - Representar números complexos no plano de Argand-Gauss e identificar números complexos a partir das suas imagens geométricas.	Compreende, interpreta e comunica utilizando linguagem matemática (A) Recorre à informação disponível em fontes documentais físicas e digitais, avalia, valida e organiza a informação recolhida (B) Analisa criticamente as conclusões a que chega, reformulando, se necessário, as estratégias adotadas (C) Usa critérios para apreciar ideias, processos ou produtos, construindo argumentos para a fundamentação das suas opiniões (D)	- Estimular a pesquisa na internet sobre a evolução do conceito de número, desde os números naturais até à formalização dos números complexos. - Sugerir a adaptação do programa efetuado em Python para a resolução de equações do 2º grau, incorporando números complexos. - Chamar a atenção de que o conjunto dos números reais é um subconjunto do conjunto dos números complexos. - Salientar que este conjunto permite obter soluções para equações do 2º grau que são impossíveis em $\mathbb{R}$, sendo que não é possível definir relações de ordem entre dois complexos. - Conduzir o aluno a verificar que existem equações do 3º grau (de coeficientes reais) que têm uma, duas ou três soluções em $\mathbb{C}$, sendo que pelo menos uma delas é sempre real e as outras duas se complexas são conjugadas. - Salientar que dois complexos são iguais se coincidem, respetivamente, nas suas partes reais e imaginárias. - Realçar que nas operações elementares entre números complexos se mantém a generalidade das propriedades das operações definidas em $\mathbb{R}$. - Sugerir a construção geométrica dos pontos correspondentes à soma e ao produto de dois números complexos, utilizando ferramentas tecnológicas.	• Testagem: - Teste; - QA; - Outras. • Análise de conteúdo: - Trabalhos de pesquisa/investigação/projeto; - Composições; - Rubricas; - Outras. • Observação: - Grelha de observação de apresentações orais; - Grelha de observação direta; - Outras.

- Números complexos na forma trigonométrica 16 aulas - Forma trigonométrica - Operações com números complexos na forma trigonométrica - Conjuntos definidos por condições na variável complexa	- Representar números complexos na forma trigonométrica. - Estabelecer a igualdade de dois números complexos na forma trigonométrica, bem como comparar números complexos cujas imagens geométricas estão em posições simétricas em relação ao eixo real, ao eixo imaginário ou à origem. - Efetuar operações com números complexos na forma trigonométrica (multiplicação, divisão, potenciação e radiciação). - Resolver equações simples em C. - Caracterizar domínios planos através de condições na variável complexa e vice-versa.	Trabalha em equipa e aprende a considerar diversas perspetivas e a construir consensos (E) Trabalha com recurso a materiais, instrumentos, ferramentas, máquinas e equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos e científicos (I)	- Salientar que um número complexo na forma trigonométrica pode ser representado por $\rho \cdot e^{i\theta}$, em que $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$, ρ é o módulo ($\rho > 0$) e θ o argumento do complexo (argumento principal se $\theta \in]-\pi, \pi]$, ou argumento não negativo mínimo se $\theta \in [0, 2\pi[$). - Realçar a equação de Euler, $e^{i\pi} + 1 = 0$, por envolver os cinco símbolos mais importantes da matemática (1, 0, π, e, i). - Levar os alunos a verificar que dois números complexos são iguais se tiverem o mesmo módulo e o seu argumento diferir em $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. - Fomentar a obtenção de números complexos na forma trigonométrica resultantes de operações entre complexos (potenciação e radiciação), evidenciando a sua interpretação geométrica (casos simples). - Propor a identificação de condições na variável complexa que representam regiões do plano complexo e vice-versa (circunferências, círculos, semirretas, retas e semiplanos).	
Probabilidade - Fenómeno aleatório 2 aulas - Experiência aleatória - Espaço de resultados ou espaço amostral - Modelo de probabilidade de acontecimentos - União e interseção de acontecimentos	- Distinguir entre fenómeno aleatório e não aleatório (determinístico). - Compreender que as realizações individuais de um fenómeno aleatório são incertas, mas existe um padrão genérico de comportamento, recorrendo-se à Teoria da Probabilidade para construir modelos matemáticos que descrevam a regularidade estatística observada numa longa série de repetições do fenómeno. - Compreender que: - À realização de um fenómeno aleatório se dá o nome de experiência aleatória; - Ao conjunto S de resultados possíveis se dá o nome de espaço de resultados ou espaço amostral; - Um acontecimento é um subconjunto do espaço de resultados e que a estes resultados se dá o nome de “resultados favoráveis” à realização do acontecimento; - A descrição do fenómeno aleatório é feita através de um modelo de probabilidade, constituído pelos resultados possíveis e a probabilidade atribuída a cada resultado. Relembrar os conceitos: acontecimento certo, impossível, elementar e composto; acontecimentos disjuntos ou mutuamente exclusivos; acontecimentos contrários ou complementares; união e interseção de acontecimentos.	Compreende, interpreta e comunica utilizando linguagem matemática (A) Recorre à informação disponível em fontes documentais físicas e digitais, avalia, valida e organiza a informação recolhida (B) Coloca e analisa questões a investigar, distinguindo o que se sabe do que se pretende descobrir (C)	- Recorrer a situações em contextos variados, para sensibilizar os alunos para a existência destes fenómenos, nomeadamente através de exemplos de fenómenos físicos, com leis determinísticas (movimento de um carro; queda de uma maçã do alto de uma torre) e de exemplos de fenómenos que se podem considerar aleatórios pela dificuldade em arranjar uma lei física para os descrever (número de irmãos de um aluno da escola, escolhido ao acaso; face do dado que fica virada para cima quando se lança; temperatura máxima a observar numa data futura). - Salientar que os modelos de probabilidade são modelos matemáticos que descrevem os fenómenos aleatórios. - Realçar que para construir um modelo de probabilidade tem que se recorrer a um processo que permita atribuir probabilidades aos acontecimentos elementares.	Testagem: - Teste; - QA; - Outras. Análise de conteúdo: - Trabalhos de pesquisa/investigação/projeto; - Composições; - Rubricas; - Outras. Observação: - Grelha de observação de apresentações orais; - Grelha de observação direta; - Outras.

• Probabilidade 8 aulas - Probabilidades frequentista - Regras de probabilidade - Probabilidade da união de acontecimentos - Regra de Laplace • Probabilidade condicionada 10 aulas - Definição - Regra do produto - Árvore de probabilidade - Tabelas de contingência - Acontecimentos independentes	• Compreender que a característica do fenómeno aleatório permite definir, intuitivamente, a probabilidade de um acontecimento A, representada por $P(A)$, como sendo o valor para o qual estabiliza a frequência relativa da realização de A, num grande número de repetições da experiência aleatória, nas mesmas condições, ou seja, $P(A)$ é o valor em que estabiliza $\frac{n_A}{n}$, onde n_A representa o número de vezes que se realizou A em n repetições da experiência aleatória. • Reconhecer que as probabilidades associadas aos acontecimentos elementares têm de ser números entre 0 e 1 e que a soma total deve ser 1. • Reconhecer que a probabilidade de um acontecimento é igual à soma das probabilidades dos acontecimentos elementares constituídos pelos resultados que o compõem. • Utilizar a representação dos acontecimentos em diagramas de Venn, para mostrar que, dados dois acontecimentos A e B quaisquer, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. • Reconhecer que se admite que os acontecimentos elementares são equiprováveis quando não haja à partida razão para admitir que os resultados do espaço de resultados não tenham igual possibilidade de se verificarem. • Compreender que quando se puder admitir que os acontecimentos elementares são equiprováveis, se pode utilizar a regra de Laplace para determinar a probabilidade de um acontecimento A, com o seguinte enunciado: $P(A) = \frac{\text{Número de resultados favoráveis a } A}{\text{Número de resultados possíveis}}$ • Saber que a probabilidade de um acontecimento A se realizar, condicionada ou sabendo que o acontecimento B se realizou, com $P(B) > 0$, se representa por $P(A B)$ e se calcula de acordo com a seguinte fórmula: $P(A B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ • Reconhecer que a partir da definição de probabilidade condicionada se pode definir a probabilidade simultânea de dois acontecimentos, chamada regra do produto, $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B A)$ ou $P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A B)$ conforme seja A ou B o acontecimento que está a condicionar.	Analisa criticamente as conclusões a que chega, reformulando, se necessário, as estratégias adotadas (C) Usa critérios para apreciar ideias, processos ou produtos, construindo argumentos para a fundamentação das suas opiniões (D) Trabalha em equipa e aprende a considerar diversas perspetivas e a construir consensos (E) Compreende processos e fenómenos científicos que permitam a tomada de decisão (I)	• Iniciar o estudo deste tema com modelos de probabilidade simples, com espaços de resultados finitos, nomeadamente os que descrevem os chamados • “jogos de sorte e azar”. Por exemplo, intuitivamente, espera-se que ao fim de muitas repetições do lançamento do dado, cada uma das faces saia aproximadamente 16,6(6)% das vezes. Alguns acontecimentos, associados com esta experiência, são: “sair uma face com um nº de pintas par”, “sair uma face com um nº de pintas maior ou igual a 5”, “sair uma face com um nº de pintas maior que 6”, etc. • Sugerir a elaboração de um programa em Python para simular o lançamento de um dado numerado com n faces (4, 6, 8, 12, 20). • Propor a resolução de problemas que envolvam o cálculo de probabilidades recorrendo à regra de Laplace, evitando o uso excessivo de cálculo combinatório. • Realçar que uma vez definido o modelo de probabilidade se pode calcular a probabilidade de qualquer acontecimento associado ao fenómeno em estudo. • Alertar os alunos para o facto de que na vida real as situações mais frequentes são aquelas em que não é possível recorrer à regra de Laplace para calcular a probabilidade de acontecimentos, por exemplo: o tipo sanguíneo de uma pessoa escolhida ao acaso, de entre a população portuguesa, ou a eficácia de uma vacina. • Conduzir os alunos a reconhecerem que em muitas situações em que se pretende calcular a probabilidade de um acontecimento, já se dispõe de alguma informação sobre o resultado da experiência, a qual permite atualizar a atribuição de probabilidade a esse acontecimento. • Exemplificar com situações intuitivas, como a extração de bolas, de vários tipos, de uma caixa sucessivamente, sem reposição, em que a composição da caixa se altera, implicando que a probabilidade de se retirar uma bola depende dos tipos de bolas que saíram nas extrações anteriores • Pedir aos alunos que calculem a probabilidade de ocorrência de cadeias simples de acontecimentos, utilizando árvores de probabilidade, como forma de organização da informação disponível. • Salientar que uma das situações mais simples para compreender intuitivamente o conceito de independência de acontecimentos está ligada à situação do lançamento de uma moeda. A moeda “não tem memória” e a probabilidade de sair “face nacional” no próximo lançamento não depende do que saiu nos lançamentos anteriores. Porém, no acontecimento “selecionar o nome de dois alunos do sexo masculino” de uma turma com 14 rapazes e 16 raparigas, a probabilidade de selecionar o segundo rapaz, depende da escolha do primeiro aluno (seleção sem reposição).	
---	---	--	--	--

- Modelos de probabilidade em espaços finitos 8 aulas - Variáveis aleatórias (discretas) - Função massa de probabilidade - Valor médio e desvio padrão populacional	- Reconhecer a utilidade de árvores de probabilidade para organizar a informação disponível sobre os acontecimentos em cadeia. - Reconhecer a utilidade das tabelas de contingência para calcular a probabilidade condicionada. - Identificar que os acontecimentos A e B, com $P(A) > 0$ e $P(B) > 0$, são independentes quando a ocorrência de um deles não altera a probabilidade da ocorrência do outro, ou seja, $P(A B) = P(A)$ (A independente de B) ou $P(B A) = P(B)$ (B independente de A). - Reconhecer que outra definição de independência consiste em dizer que os acontecimentos A e B são independentes se e só se $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$. As duas definições de independência são equivalentes desde que se exija que $P(A) > 0$ e $P(B) > 0$. - Reconhecer que se podem associar números aos resultados de um fenómeno aleatório, através de uma função denominada variável aleatória (v.a.) e que construir um modelo de probabilidade para modelar um fenómeno aleatório, com espaço de resultados finito, é equivalente a construir a função massa de probabilidade (f.m.p.) da variável aleatória associada. - Identificar a população com a variável aleatória associada e reconhecer que construir a f.m.p. é obter um modelo para a população. - Reconhecer que a f.m.p. permite calcular a probabilidade de acontecimentos, relacionados com a realização do fenómeno modelado. - Reconhecer que dois dos parâmetros, características numéricas da população, mais importantes são o valor médio (média populacional) e o desvio padrão populacional, e saber que estes parâmetros se representam pelas letras gregas μ (miu) e σ (sigma), respetivamente. - Compreender o paralelismo entre valor médio μ e a média $\bar{x}$ e também, de modo idêntico, para o desvio padrão populacional σ e desvio padrão (amostral) s, e outras medidas calculadas para a população e para a amostra. - Calcular o valor médio e o desvio-padrão populacional de uma variável aleatória de suporte finito, a partir da f.m.p.		- Promover a resolução de problemas em que se obtenha a probabilidade de um certo acontecimento B, quando são conhecidas as probabilidades de B condicionadas aos acontecimentos $(A_1, A_2, \dots, A_n)$, mutuamente exclusivos em que a sua união é igual ao espaço de resultados e são conhecidas as suas probabilidades, não nulas, utilizando: $P(B) = P(B A_1) \cdot P(A_1) + \dots + P(B A_n) \cdot P(A_n)$ - Exemplificar e orientar os alunos na construção de modelos de probabilidade simples, nomeadamente o que descreve o resultado do lançamento de um dado equilibrado, em que se define a variável aleatória X, que associa a cada face do dado, o seu número de pintas. - Destacar a situação do lançamento de dois dados em que se pretende modelar o fenómeno aleatório que consiste em observar a soma das pintas dos dois dados e chamar a atenção para que embora o número de resultados possíveis seja igual a 11, a probabilidade de cada um não é $\frac{1}{11}$. - Propor o cálculo do valor médio e do desvio padrão, recorrendo à f.m.p. em exemplos como o do lançamento do dado e de outros modelos, como seja, a extração de bolas de um saco com e sem reposição. - Salientar que a fórmula utilizada para calcular o valor médio é semelhante à fórmula utilizada para calcular a média com os dados discretos agrupados em tabelas de frequências relativas, destacando a interpretação frequentista da probabilidade, em que as frequências relativas são interpretadas como probabilidades. - Orientar na interpretação do valor médio, utilizando exemplos associados a jogos.	
---	---	--	---	--

• Modelo Normal 4 aulas - Propriedades	• Reconhecer o modelo ou distribuição Normal, de suporte contínuo, como um dos modelos de probabilidade mais importantes para a modelação de fenómenos aleatórios. • Identificar que as curvas que representam esta família de modelos são simétricas, com o aspeto de um sino, e que cada distribuição Normal fica definida através dos parâmetros valor médio μ e desvio padrão σ. • Saber que o valor médio determina o eixo de simetria da distribuição e que a distância entre o valor médio e as abcissas dos pontos de mudança de curvatura é igual ao desvio padrão. • Calcular probabilidades com base nesta família de modelos.		• Salientar que é necessário alargar o conceito de modelo de probabilidade a situações onde o espaço amostral não seja finito, como por exemplo, o “nº de carros que passam numa determinada portagem das 8h às 9h”, em que se considera como suporte do modelo os números naturais, ou o comprimento do salto de um atleta, em que o suporte da variável comprimento é $\mathbb{R}^+$. • Destacar que o modelo Normal é, dos modelos contínuos, o mais conhecido para estudar variáveis aleatórias de suporte contínuo, como, por exemplo, a “altura” ou o “peso” de um indivíduo adulto. • Salientar que vários cientistas, ao trabalharem com dados, obtinham histogramas cuja população poderia ser modelada por um modelo Normal. Este modelo é a base de muitos dos processos de inferência estatística clássica. • Salientar a curva em forma de “sino” como representativa do modelo Normal, bem como o significado nessa curva dos valores da probabilidade associados a intervalos. • Utilizar a tecnologia para calcular probabilidades, com base no modelo Normal, associadas a quaisquer intervalos.	
Funções • Função exponencial 6 aulas - Divisão euclidiana • Função inversa 4 aulas	• Identificar função exponencial, como função do tipo $f(x) = a^x, a \in \mathbb{R}^+$ que verifica as propriedades: $a^0 = 1, 1^x = 1, a^x a^y = a^{x+y}, a^x b^x = (ab)^x, a^{-x} = \frac{1}{a^x}, \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}, \frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x, (a^x)^y = a^{xy}, a, b \in \mathbb{R}^+, x, y \in \mathbb{R}$ • Identificar, em funções do tipo $f(x) = b \cdot a^{x-c} + d, a \in \mathbb{R}^+, c, d \in \mathbb{R} \text{ e } b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ domínio, contradomínio, coordenadas dos pontos de interseção com os eixos coordenados, monotonia e comportamento quando x tende para mais infinito e menos infinito. • Resolver, graficamente, equações envolvendo funções exponenciais em contexto de resolução de problemas. • Conhecer as raízes de índice natural, nomeadamente, a radiciação de índice natural como inversa da potenciação de expoente natural. • Identificar funções invertíveis e não invertíveis, nomeadamente recorrendo aos gráficos das funções e ao “teste da reta horizontal” e à sua formulação algébrica, em casos simples. • Estabelecer as relações entre o domínio e o contradomínio de funções inversas, bem como a simetria das respetivas representações gráficas, relativamente à bissetriz dos quadrantes ímpares.	Compreende, interpreta e comunica utilizando linguagem matemática (A) Recorre à informação disponível em fontes documentais físicas e digitais, avalia, valida e organiza a informação recolhida (B) Analisa criticamente as conclusões a que chega, reformulando, se necessário, as estratégias adotadas (C)	• Retomar o estudo das regras operatórias das potências feito no ensino básico. • Apresentar a função exponencial num contexto de resolução de problemas de crescimento e decrescimento exponencial, como por exemplo o crescimento de bactérias, o arrefecimento de um café e o decaimento radioativo. • Promover a resolução gráfica de equações envolvendo funções exponenciais. • Propor a resolução de problemas de modelação que envolvam a função exponencial, como por exemplo o cálculo da taxa de juro anual nominal, ou que envolvam a função logística, por exemplo o crescimento de uma população limitado pela capacidade de carga do meio. • Retomar o conceito de raízes quadradas e cúbicas desenvolvido no ensino básico. • Mencionar a relação entre as potências de expoente fracionário e as raízes de índice natural: $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p} \text{ } a > 0, q \in \mathbb{N} \text{ e } p \in \mathbb{Z}$. • Estudar a função quadrática como exemplo de função não invertível no seu domínio. • Propor a formulação algébrica do “teste da reta horizontal” para identificar funções inversas, ou restrições do domínio onde a função é invertível. • Promover a utilização da tecnologia para estudar funções invertíveis e comparar gráficos de funções com os das suas inversas. Por exemplo, determinar a imagem pela reflexão em relação à reta $y = x$ de funções diversas (polinómicas, racionais e exponenciais), em casos simples, e encontrar a expressão algébrica das funções obtidas, caso existam.	• Testagem: - Teste; - QA; - Outras. • Análise de conteúdo: - Trabalhos de pesquisa/investigação/projeto; - Composições; - Rubricas; - Outras. • Observação: - Grelha de observação de apresentações orais; - Grelha de observação direta; - Outras.

• Função logarítmica 12 aulas • Função composta 2 aulas • Derivadas 22 aulas - Derivada da função exponencial de base e - Derivada da função logarítmica de base e - Regras de derivação - Problemas de otimização - Segunda derivada	• Identificar a função logarítmica como a inversa da função exponencial com a mesma base. • Estudar intuitivamente, com recurso à tecnologia, o comportamento de funções com logaritmos. • Conhecer e aplicar as propriedades e regras operatórias dos logaritmos, em casos simples, e em contexto de resolução de problemas e de modelação. • Resolver equações, envolvendo funções exponenciais e funções logarítmicas, em contexto de resolução de problemas, tanto analiticamente como graficamente. • Conhecer e aplicar a função composta, em casos simples, analisando o seu domínio. • Identificar o número e (número de Euler) como a única base da função exponencial em que o seu gráfico coincide com o gráfico da respetiva função derivada. • Conhecer a derivada da função $f(x) = e^x$. • Identificar $g(x) = \ln x$ como a função inversa de $f(x) = e^x$ • Saber relacionar geometricamente a derivada da função logarítmica com a derivada da função exponencial, tendo por base a simetria das retas tangentes aos gráficos em pontos simétricos, relativamente à bissetriz dos quadrantes ímpares. • Conhecer a derivada da função $g(x) = \ln x$ • Conhecer o teorema da derivada da função composta (Regra da Cadeia). • Conhecer as regras de derivação para funções do tipo: $f(x) = x^a$ (com a real e $x > 0$); $f(x) = a^x$ (com $a > 0$ e $a \neq 1$); $f(x) = \log_a x$ (com $a > 0$, $a \neq 1$ e $x > 0$); $f(x) = \sin(x)$, $f(x) = \cos(x)$ e $f(x) = \tan(x)$ • Determinar derivadas envolvendo operações com as funções estudadas anteriormente, em casos simples. • Resolver problemas de otimização tendo por base funções deriváveis. • Determinar a segunda derivada de funções polinomiais, racionais, exponenciais, logarítmicas e trigonométricas.	Desenvolve ideias e projetos criativos com sentido no contexto a que dizem respeito, e testa e decide sobre a sua exequibilidade (D) Trabalha em equipa e aprende a considerar diversas perspetivas e a construir consensos (E) Trabalha com recurso a materiais, instrumentos, ferramentas, máquinas e equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos e científicos (I)	• Propor a exploração de modelos exponenciais e conduzir os alunos na identificação da relação inversa. • Promover a utilização das propriedades e regras operatórias dos logaritmos, incluindo a fórmula da mudança de base. • Referir as escalas logarítmicas na medição de certas grandezas, como por exemplo o pH de uma solução, a magnitude do som em decibéis, ou a escala logarítmica usada na medição da acuidade visual. • Promover a resolução de problemas e a modelação, com tecnologia ou analiticamente, que envolvam a função exponencial e a função logarítmica. • Recorrer a exemplos simples para estudar casos de funções compostas em que se evidencie eventuais alterações aos seus domínios. • Promover a utilização da tecnologia para representar funções da família $f(x) = a^x$, $a \in [2,3]$ e respectivas derivadas (calculadas usando funções específicas da tecnologia para derivadas ou tangentes ao gráfico) e verificar que só existe um valor de a para o qual a função e a sua derivada coincidem. • Fazer referência ao trabalho pioneiro de Euler, o primeiro a estudar de forma sistemática o número e, que provou ser irracional. • Ilustrar a determinação da derivada de $g(x) = \ln x$, através da construção seguinte, usando tecnologia gráfica: 1. Construir a representação gráfica de $f(x) = e^x$ e, por meio de uma simetria relativa à bissetriz dos quadrantes ímpares, obter o gráfico da função $g(x) = \ln x$; 2. Marcar um ponto de coordenadas $(x, g(x))$ e o seu simétrico relativamente à reta $y = x$; 3. Traçar a reta tangente ao gráfico de g em $(x, g(x))$ e, por simetria, traçar a tangente ao gráfico de f em $(g(x), x)$; 4. Verificar que o produto dos declives das retas tangentes é igual a 1, qualquer que seja x; 5. Observar que o declive da tangente ao gráfico de f em $(g(x), x)$ é x, porque $(e^x)' = e^x$; 6. Concluir que o declive da tangente ao gráfico de g em $(x, g(x))$ é $\frac{1}{x}$, ou seja $(\ln x)' = \frac{1}{x}$. • Dar a conhecer e promover a utilização das regras de derivação, sem demonstrar, das funções $f(x) = x^a$, $f(x) = a^x$, $f(x) = \log_a x$ e de funções trigonométricas. • Promover a aplicação do teorema da derivada da função composta, generalizando as fórmulas de derivação conhecidas.	
---	---	---	--	--

- Concavidades e pontos de inflexão • Funções contínuas e deriváveis 16 aulas - Continuidade - Regra de L'Hôpital - Assíntotas - Estudo de funções	• Relacionar o sinal e os zeros da segunda derivada com o sentido das concavidades e pontos de inflexão do gráfico de uma função. • Reconhecer uma função contínua num ponto do seu domínio como uma função que admite limite nesse ponto igual à sua imagem. • Identificar se uma função é contínua num intervalo aberto, em casos simples, tendo como apoio o conhecimento de uma lista de funções contínuas e respetivas operações. • Estudar o limite de funções que conduzem a indeterminações do tipo $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$ aplicando a Regra de L'Hôpital, usando limites notáveis ou técnicas de cálculo simples. • Determinar analiticamente as equações das assíntotas, verticais e não verticais, ao gráfico de uma função. • Resolver problemas, envolvendo o estudo de funções, complementando o uso da tecnologia com o estudo analítico.		• Promover a resolução de problemas de otimização envolvendo funções deriváveis já estudadas, num contexto de modelação matemática. • Propor o cálculo da segunda derivada de funções. Só estão incluídas nestas Aprendizagens Essenciais situações de cálculo algébrico da segunda derivada de funções cujo grau de dificuldade não ultrapasse o dos seguintes exemplos: $f(x) = x^4 - 4x^3 + 7, g(x) = x^2 \cdot \ln x \text{ e } h(x) = \frac{e^x}{x}$ • Promover o estudo de funções, incluindo o sentido das concavidades e os pontos de inflexão em intervalos onde as funções têm segunda derivada. • Nos problemas de otimização e no cálculo de pontos de inflexão do gráfico de uma função é proposto que o trabalho com os alunos se restrinja a funções polinomiais, racionais, exponenciais e logarítmicas e operações entre estas. • Retomar a utilização da noção intuitiva e informal de limite num ponto, no estudo da continuidade. • Dar a conhecer aos alunos a seguinte lista de funções contínuas: - Funções polinomiais; - Funções exponenciais e logarítmicas; - Funções trigonométricas. Incluir nesta lista as funções obtidas a partir de funções contínuas, através das operações: - Soma, diferença, produto e quociente de funções contínuas; - Composição de funções contínuas. • Alertar para a existência de outras funções contínuas não contempladas na lista anterior. • Alertar para a existência de funções descontínuas num intervalo aberto. Analisar alguns modelos de funções descontínuas como por exemplo: tarifários de estacionamento, escalões do IRS, a força exercida pelo propulsor de um foguete após o seu lançamento. • Informar os alunos das propriedades operatórias dos limites (adição, subtração, multiplicação e divisão). • Promover o estudo de indeterminações para comparar magnitudes de funções quando a variável independente se aproxima de um ponto específico ou do infinito. • Alertar os alunos para as condições em que não é possível aplicar a Regra de L'Hôpital e para os casos em que não é aconselhável o seu uso. • Propor a construção de uma tabela de limites notáveis, recorrendo à regra de L'Hôpital, nomeadamente: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x + 1)}{x} = 1; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1;$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log_a x}{x^p} = 0; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x}{x^p} = +\infty \text{ (} a > 1 \text{ e } p \in \mathbb{N} \text{)}$	
--	---	--	---	--

• Resolução aproximada de equações 10 aulas - Teorema dos valores intermédios (Bolzano- Cauchy) - Método da Bissecção - Método de Newton- Raphson	• Conhecer o teorema dos valores intermédios (Bolzano-Cauchy). • Conhecer e aplicar o método da Bissecção. • Conhecer e aplicar o método de Newton-Raphson.		• Propor aos alunos a determinação das assíntotas verticais e não verticais ao gráfico de uma função. Só estão incluídas nestas Aprendizagens Essenciais situações de cálculo algébrico das equações das assíntotas do gráfico de funções cujo grau de dificuldade não ultrapasse o dos seguintes exemplos: $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2 + 1}, g(x) = \frac{e^x}{x + 1} \text{ e } h(x) = x + \ln x$ • Incentivar o estudo das funções, combinando as ferramentas analíticas com a tecnologia gráfica, identificando na representação gráfica obtida as características resultantes de processos analíticos. • Proporcionar oportunidades para compreender que as representações gráficas apresentadas pela tecnologia podem, por vezes, não corresponder com rigor ao gráfico da função em estudo. • No estudo de funções, nestas Aprendizagens Essenciais, só está incluído o trabalho com funções polinomiais, racionais, exponenciais e logarítmicas e operações entre estas.	
Tema Opcional 18 aulas • Introdução à Inferência Estatística - Raciocínio indutivo ou inferência - Parâmetro e estatística - Estimador e estimativa - Amostras aleatória	• Compreender que o raciocínio indutivo ou inferencial se utiliza quando se pretende estudar uma população, analisando só alguns elementos dessa população, ou seja, uma amostra, e que a partir das propriedades verificadas na amostra, se inferem propriedades para a população. • Conhecer que parâmetro é uma característica numérica da população e que estatística é uma característica numérica da amostra. • Compreender que um dos objetivos pretendidos ao recolher uma amostra da população, que se pretende estudar, é tirar conclusões sobre os parâmetros dessa população, considerando-se funções adequadas, estatísticas, que só dependem dos elementos da amostra. • Saber que à estatística utilizada para estimar um parâmetro também se dá o nome de estimador e que ao valor do estimador para uma determinada amostra também se chama estimativa. Compreender que é necessário recolher uma amostra aleatória, quando se pretende utilizá-la para retirar conclusões para a população subjacente, pois só assim será possível utilizar a probabilidade para quantificar o erro cometido ao inferir para a população, os resultados aí verificados. • Compreender que os processos de seleção da amostra podem ser sem reposição ou com reposição. • Compreender que o processo da seleção da amostra é o primeiro passo importante para uma inferência estatística eficiente.	Compreende, interpreta e comunica utilizando linguagem matemática (A) Recorre à informação disponível em fontes documentais físicas e digitais, avalia, valida e organiza a informação recolhida (B)	• Recorrer a contextos variados, que levem os alunos a tomar consciência de situações aleatórias, em que é necessário tomar decisões sobre populações, a partir de alguma informação recolhida dessas populações, na forma de dados. • Orientar os alunos na leitura da ficha técnica que acompanha o resultado de uma sondagem, alertando que a tomada de decisões tem um erro associado, que vai ser contabilizado em termos de probabilidade. • Salientar que o parâmetro é uma característica numérica da população, (normalmente desconhecida) enquanto a estatística é uma característica numérica da amostra (que se pode calcular). Exemplificar situações, como por exemplo, a média das alturas de todos os portugueses adultos, que é um parâmetro, enquanto a média das alturas de uma amostra é uma estatística, ou a proporção de eleitores decididos a votar em determinado candidato presidencial, que é um parâmetro, e a proporção de eleitores, que numa amostra, disseram ir votar nesse candidato, é uma estatística. • Chamar a atenção dos alunos que o termo estatística se utiliza tanto para referir uma função das amostras, o estimador ($\bar{X}$) como o valor observado dessa função para uma determinada amostra que tenha sido selecionada, a estimativa ($\bar{x}$). • Orientar os alunos na recolha de uma amostra, necessariamente aleatória, quando se pretende utilizá-la para estimar um parâmetro. Realçar que o valor do estimador depende da amostra considerada, podendo-se obter tantas estimativas diferentes, quantas as amostras consideradas, da mesma dimensão, sendo esta variabilidade inerente à aleatoriedade da escolha da amostra. • Exemplificar a construção da distribuição de amostragem do estimador da proporção de homens numa população constituída por 3 mulheres e 2 homens, recolhendo amostras de dimensão 2.	• Testagem: - Teste; - QA; - Outras. • Análise de conteúdo: - Trabalhos de pesquisa/investigação/projeto; - Composições; - Rubricas; - Outras. • Observação: - Grelha de observação de apresentações orais; - Grelha de observação direta; - Outras.

- Distribuição de amostragem de uma estatística - Distribuição de amostragem da média - Teorema Limite Central (TLC) - Estimativas pontuais e estimativas intervalares - Intervalo de confiança, para o valor médio, com uma confiança de 95% - Intervalo de confiança, para o valor médio, com outros níveis de confiança de $100(1 - \alpha)\%$ - Margem de erro	• Compreender que para averiguar da eficácia de um estimador para estimar um parâmetro, é necessário conhecer a sua distribuição de amostragem, ou seja, a distribuição dos valores obtidos pelo estimador, quando se consideram todas as amostras possíveis (da mesma dimensão), utilizando um determinado esquema de amostragem. • Compreender que a distribuição de amostragem de um estimador depende da dimensão das amostras consideradas e apresentará tanto menor variabilidade, quanto maior for a dimensão das amostras. • Compreender a utilização do Teorema Limite Central (TLC) na obtenção da distribuição de amostragem da média, quando se consideram amostras aleatórias de dimensão suficientemente grande, legitimando a utilização do modelo Normal e a utilização da média como estimador do valor médio μ. • Reconhecer as limitações das estimativas pontuais, na medida em que, devido à variabilidade amostral, podem apresentar tantos valores diferentes quantas as amostras utilizadas para as obter. • Utilizar o modelo Normal como aproximação da distribuição de amostragem do estimador média, para estimar o valor médio μ, desconhecido, de uma população com desvio-padrão σ, para obter a seguinte probabilidade $P\left(\bar{X} - 1,96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + 1,96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 0,95$ e chamar ao intervalo $\left[\bar{x} - 1,96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + 1,96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$ um intervalo de 95% de confiança para μ, em que se substitui o parâmetro σ, quando desconhecido, pelo desvio-padrão amostral. • Reconhecer a fórmula geral para o intervalo de confiança, com uma confiança de $100(1 - \alpha)\%$, $\left[\bar{x} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$.	Analisa criticamente as conclusões a que chega, reformulando, se necessário, as estratégias adotadas (C) Usa modelos para explicar um determinado sistema, para estudar os efeitos das variáveis e para fazer previsões do comportamento do sistema em estudo (C) Usa critérios para apreciar ideias, processos ou produtos, construindo argumentos para a fundamentação das suas opiniões (D) Trabalha em equipa e aprende a considerar diversas perspetivas e a construir consensos (E)	• Conduzir, dada uma certa população, à obtenção da distribuição de amostragem da média, quando se pretende estimar o valor médio dessa população, utilizando a tecnologia gráfica para simular a recolha de amostras de determinada dimensão. • Chamar a atenção dos alunos para a existência de duas fórmulas para calcular o desvio-padrão amostral, obtido a partir das fórmulas para a variância amostral: $S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n - 1} \text{ e } S'^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n}$ e explicar que a razão da utilização da primeira, é ser a que fornece melhores estimativas quando se está a estimar o desvio-padrão populacional σ. • Salientar que obter a distribuição de amostragem da média seria uma tarefa, a maior parte das vezes, impossível, pois teria de se calcular o valor da média para todas as amostras aleatórias de determinada dimensão, de populações de grandes dimensões ou eventualmente infinitas. Esta situação é resolvida pelo TLC, segundo o qual o modelo Normal é uma aproximação para a sua distribuição de amostragem, independentemente da forma da distribuição da população subjacente. • Exemplificar a recolha de várias amostras aleatórias, da mesma dimensão, calculando o valor da média para cada uma delas e explorar esta situação, chamando a atenção para a impossibilidade de saber qual das estimativas se deve utilizar, para estimar o parâmetro valor médio, desconhecido, da população subjacente às amostras consideradas. • Explorar o significado de intervalo aleatório, cuja leitura correta deve ser realçada, tendo em consideração que o aleatório está nos limites do intervalo, pelo que se deve ler “a probabilidade do intervalo conter μ, é 95%” e não “a probabilidade de μ estar contido”. • Realçar o significado da confiança de 95%. Sugerir que essa confiança pode ser entendida do seguinte modo: se recolhêssemos 100 amostras e se calculássemos para cada uma delas o intervalo $\left[\bar{x} - 1,96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + 1,96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$ esperar-se-ia que aproximadamente 95 dos intervalos contivessem o valor médio; como, na prática, só se recolhe uma amostra, só se calcula um intervalo, não se sabendo se é um dos que contém ou não μ. • Propor a elaboração de um programa em Python que calcule o intervalo de 95% de confiança para o valor médio. • Explorar a relação entre a margem de erro, a confiança e a dimensão da amostra a recolher, para construir a estimativa intervalar.	
---	--	---	---	--

• Primitivas
imediatas e
Integrais definidos

- Áreas de figuras definidas por gráficos de funções
- Teorema Fundamental do Cálculo Integral
- Propriedades das primitivas

- Conhecer o processo de primitivação (antiderivação) como processo inverso da derivação.
- Reconhecer o integral definido de uma função positiva como a área de uma região compreendida entre o gráfico da função num intervalo e o eixo das abcissas.
- Conhecer e aplicar o Teorema Fundamental do Cálculo Integral e a Fórmula de Barrow para calcular integrais definidos.
- Calcular áreas de figuras definidas por funções contínuas e positivas usando a Fórmula de Barrow.
- Provar e aplicar as seguintes propriedades das primitivas (antiderivadas):
- $P(kf) = kP(f)$ e
- $P(f + g) = P(f) + P(g)$ generalizadas aos integrais.
- Construir uma tabela de primitivas simples, envolvendo funções polinomiais, $\frac{1}{x}$, e^x , $\sin(x)$ e $\cos(x)$.
- Usar exclusivamente primitivas de combinações lineares das funções da tabela referida anteriormente.

Compreende processos e fenómenos científicos que permitam a tomada de decisão (I)

Trabalha com recurso a materiais, instrumentos, ferramentas, máquinas e equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos e científicos (I)

- Orientar os alunos na obtenção do intervalo de confiança para a proporção p , admitindo que o modelo de probabilidade para a população X é

X	1	0
Probabilidade	p	$1 - p$

Valor médio $\bar{X} = p$. Variância de $X = p(1 - p)$

- Promover o cálculo de primitivas (antiderivadas) tendo por base o conhecimento das derivadas de funções elementares já estudadas.
- Discutir a relação entre o valor da área abaixo do gráfico de uma função contínua e positiva e a sua primitiva, para introduzir o Teorema Fundamental do Cálculo Integral.
- Propor a determinação de áreas limitadas por gráficos de funções contínuas e positivas nos casos em que se conhece a primitiva.
- Propor a elaboração de um programa em Python para aproximar o valor de um integral.
- Conduzir os alunos à formulação das propriedades das primitivas (antiderivadas) tendo por base o conhecimento das propriedades das derivadas.
- Propor a construção de uma tabela de primitivas a partir da definição de primitiva, como por exemplo a seguinte:

Função	Primitiva
k	$kx + C$
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$
e^x	$e^x + C$
$\frac{1}{x}$	$\ln x + C$
$\sin(x)$	$-\cos(x) + C$
$\cos(x)$	$\sin(x) + C$

• Matrizes - Conceito de matriz - Operações com matrizes - Aplicações às transformações geométricas	• Identificar matrizes e operações com matrizes em situações concretas. • Entender o conceito de matriz e conhecer alguns casos particulares, nomeadamente matriz retangular, matriz quadrada, matriz linha, matriz coluna, matriz diagonal e matriz identidade. • Operações elementares com matrizes: adição, subtração, multiplicação (multiplicação por um escalar e multiplicação de duas matrizes). • Analisar as propriedades da adição e da multiplicação de matrizes e os casos de impossibilidade (associados à dimensão das matrizes). • Caracterizar translações através da soma de matrizes coluna. • Caracterizar variações de tamanho (scaling), cisalhamentos (shearing) e rotações no plano, recorrendo a matrizes adequadas multiplicadas por matrizes coluna.		• Recorrendo a exemplos de situações reais, conduzir à noção de matriz de números reais, a partir da representação em tabela ou esquemas (por exemplo, em problemas económicos, de composição de misturas, de ligações ferroviárias ou rodoviárias entre cidades, etc.). • Incentivar a atribuição de significado a um elemento específico da matriz, no contexto da situação que esta representa. • Propor a identificação e construção de diferentes tipos de matrizes, e a identificação de situações que podem ser representadas por cada um dos tipos de matrizes. • Retomar os exemplos trabalhados anteriormente para identificar e contextualizar as operações e o resultado que produzem, e antever propriedades das operações. Promover a determinação da matriz resultante da adição e da subtração de duas matrizes e analisar casos de impossibilidade. • Propor o cálculo do produto de duas matrizes e analisar casos de impossibilidade. • Fazer notar o caso das matrizes quadradas de uma certa ordem, especialmente a não comutatividade da multiplicação. • Incentivar o recurso à tecnologia para analisar vários exemplos e identificar os casos de impossibilidade e a não comutatividade da multiplicação. • Recorrer a construções do Geogebra para ilustrar as transformações geométricas realizadas sobre uma figura. • Promover a identificação da multiplicação de matrizes com a composição de transformações geométricas. • Referir a importância destes procedimentos com matrizes no moderno cinema de animação.	
---	--	--	--	--

Áreas de competência do perfil dos alunos: A-Linguagens e textos; B-Informação e comunicação; C-Raciocínio e resolução de problemas; D-Pensamento crítico e pensamento criativo; E-Relacionamento interpessoal; F-Desenvolvimento pessoal e autonomia; G-Bem-estar, saúde e ambiente; H-Sensibilidade estética e artística; I-Saber científico, técnico e tecnológico; J-Consciência e domínio do corpo.